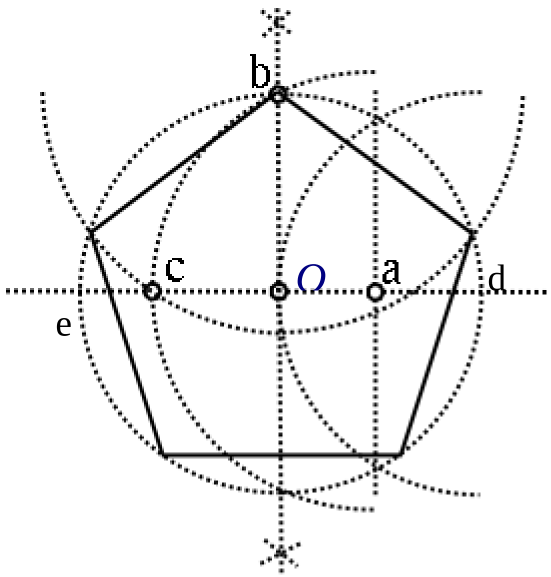
談尺規作圖

第一章、 尺規作圖的困難

提起尺規作圖，我們學生的第一個感覺多半是一種訓練頭腦靈活的練習。因爲有不少作圖問題都有五花百門的解答，尤其是一些刁鑽的作圖問題，更令人不知從何入手。就以《幾何原本》中正五邊形的作圖爲例：

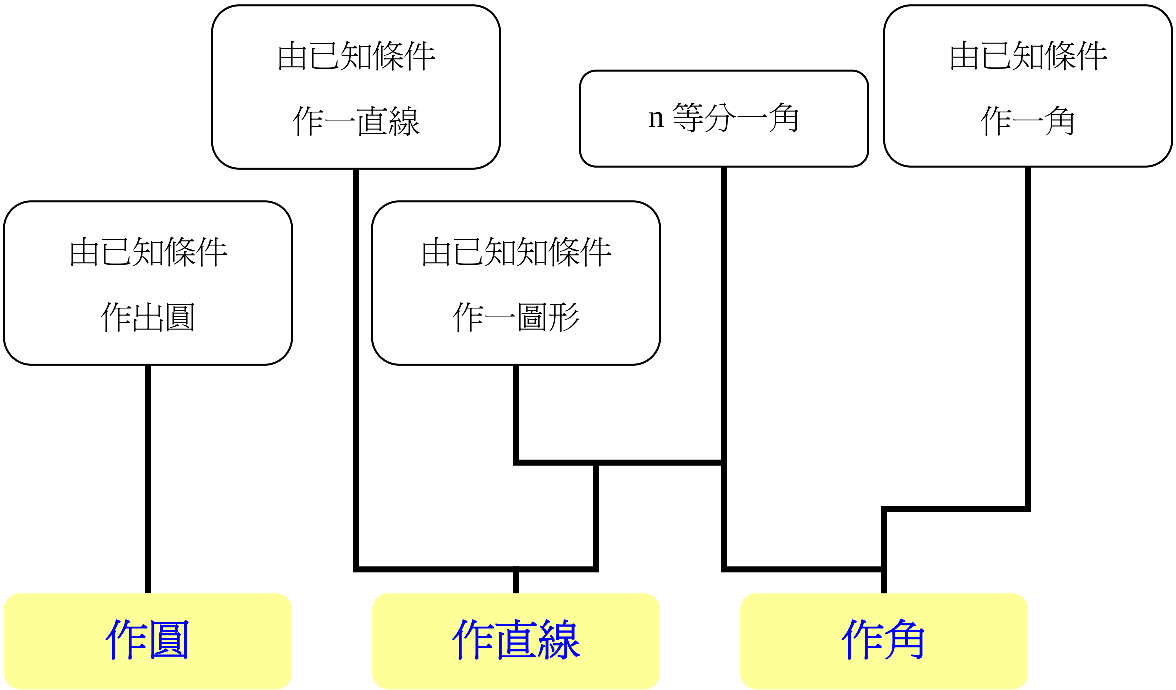


1. 作出兩條互相垂直的線段
2. 以兩線相交點爲圓心作一圓
3. 作 *O*d 中點 a
4. 以 ab 爲半徑，作圓弧交直徑 ed 於 c
5. bc 就是圓的內接五邊形邊長，以 bc 爲半徑，用圓規在圓上定出五點
6. 連接相鄰兩點，便得出一個正五邊形

到底歐幾里德是如何想出這種五等分圓周的方法？這總不能靠亂畫圓孤直線吧！所以，對於尺規作圖，我們非建一套思維方法不可。

第二章、尺規作圖的分類

經過歸納，我發現尺規作圖能總結成以下幾種類型。



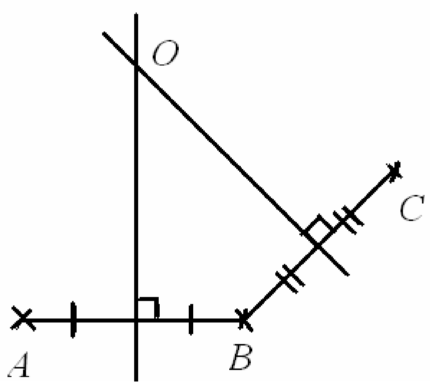
所以，尺規作圖其實是作出符合要求的圓、線段和角。

第三章、 作圓

對於圓，我們先從它的定義出發。

圓的定義：距離一點(圓心) O 有相同距離(半徑)的平面圖形。

所以，我們只要知道圓心的位置和半徑的長度，便能作出一個圓。關於圓心位置，我們只要知道圓周上三點便能簡單求出：



1. 連結 AB 和 BC
2. 作出 AB 和 BC 的垂直平分線，兩條垂直平分線相交於 O
3. O 便是過 A, B, C 三點圓的圓心

而半徑線段的長度，我們將留待下一章再作討論。

第四章、 作直線

對於不要求長度的直線。只要求出直線上的兩點位置，便能作出直線了。然而，有時我們除了要作出直線的位置外，還要求出直線的長度。

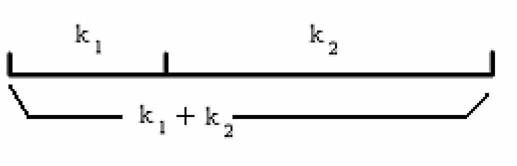
直線的長度要由尺規作出，該長度就必須由單位線段 e(長爲 1 的線段)有限次四則運算及開平方求出。

線段的四則運算可以由以下方法作出：

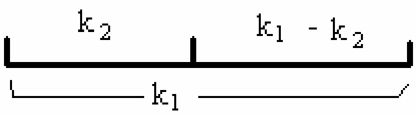
已知有長爲k_1和k_2的線段和長度爲e單位線段，$e \cdot k = k$

(我們也可以把單位線段 e 看作長爲 1 的線段)

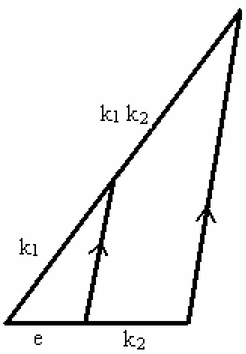
1. $k_1 + k_2$



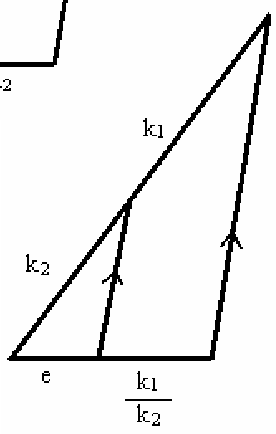
2. $k_1 - k_2$



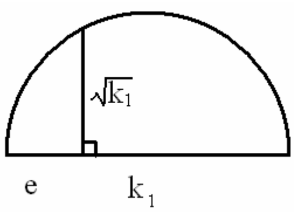
3. $k_1 \times k_2$



4. $\frac{k_1}{k_2}$, ($k_2 \neq 0$)



5. $\sqrt{k_1}$



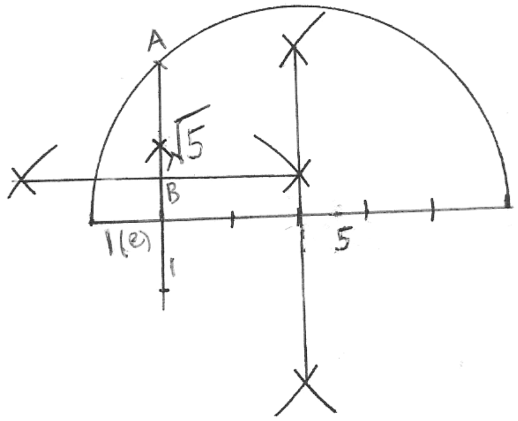
於是，我們只要知道需要求的線段 k 的長度，便一定能作出它。例如，利用尺規作出一個黃金矩形。

1. 作出單位線段 e (長爲 1)　1(e)

現在，我們要知道矩形另一條邊的長度，因爲黃金比例 $= 1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，

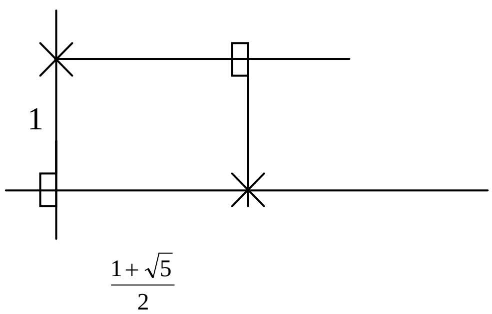
所以另一邊的長度應爲 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (e = 1)

2. 作出長爲 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的線段



$AB = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. 組合長爲 1 和 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的線段，作出黃金矩形



~ 題外話 ~ 其實尺規可作線段對於尺規作圖的加法成一個交換么半群(commutative monoid)，乘法成一個交換群(abelian group)，證明詳見*附錄 1*。

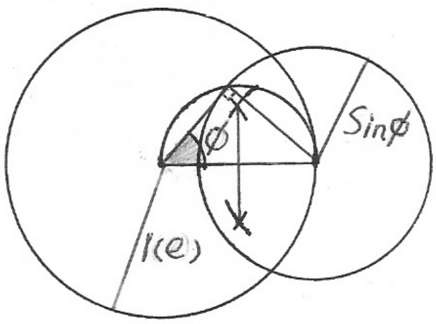
第五章、 作角

因爲沒有量角器，所以用直尺圓規來作出一個已知角，要靠線段來定位，也就是利用三角函數。

要作出∠ϕ，我們可以先作一個以 e 爲半徑的單位圓(長爲 1)，再作出一半徑 e，然後作出 sinϕ或 cosϕ便可得到ϕ，方法如下：

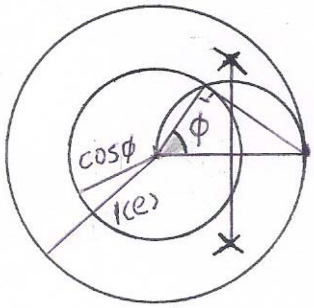
方法一：

先求出 sinϕ的值，再作出長爲 sinϕ的線段，隨後如圖中所示，作出∠ϕ。



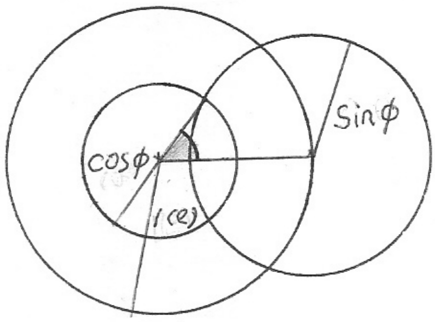
方法二：

先求出 cosϕ的值，再作出長爲 cosϕ的線段，隨後如圖中所示，作出∠ϕ。



方法三：

先求出 sinϕ的值，再作出長爲 sinϕ的線段；然後求出 cosϕ的值，再作出長爲 cosϕ的線段。最後依照附圖，作出∠ϕ。



如果 sinϕ或 cosϕ是作圖較麻煩的數，第三個方法會不太方便；否則，第三個方法通常較準確。

明顯地，並非所有角度都能夠用尺規作出，到底怎樣的角度能或不能被尺規作出呢？

先考慮角度爲整數的角。

$$\because \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4} \qquad \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\sin 30^o = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore 36^o$和 30^o皆是尺規可作的角。作兩角之差 6^o角，再平分 6^o角，便可作出 3^o角，也就是說，所有度數爲 3 倍數的角，都可以用尺規作出。那麼其他整數角可不可以用尺規作出呢？

經過計算附錄 2，

$$4(\cos 1^o)^3 - 3\cos 1^o = \frac{\sqrt{8+\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}}{4} \quad \cdots (1)$$

$$4(\cos 2^o)^3 - 3\cos 2^o = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{8} \quad \cdots (2)$$

因爲這兩條三次方程的根涉及開三次冪，所以它們的根並不能由尺規作出。

所以，能由尺規作出的整數角度只能是 3 的倍數。

我們現在再考慮角度爲有理數$\frac{p}{q}\pi$的角。

首先，我們留意到，任何一個角都能被二等分，也能被任意倍增。

於是，第一種能由尺規作出的有理數角度爲$\frac{q\pi}{2^{k-1}}$， $q,k \in Z^+$

因爲除 2^{k-1}等分外的等分任意角不能被作出，所以y^{k-1}中的y只能爲 2。

根據高斯的發現，一切邊數為質數的正 $2^{2^n}-1$ (費馬質數)邊形皆可以用尺規作出。所以，角度為 $\dfrac{\pi}{2^{2^n}-1}$ (且 $2^{2^n}-1$ 為質數)也可由尺規作出。

可由尺規作出的有理數角度 =

$$\frac{q\pi}{(2^{2^n}-1)^t\cdot 2^{k-1}}$$ ，$q,n,k\in Z^+$ ，$t\in\{0,1\}$ 且 $2^{2^n}-1$ 為質數

第六章、 總結

經過這次對尺規作圖的探索後，我終於能總結出一切尺規作圖的方法。

一、先設一單位線段
二、求出需要作的線段長度和角的三角函數值
三、作這些線段和角
四、利用它們解決作圖問題

循着這個法則，我們應該可以解決一切有解的尺規作圖問題。

看似變化萬千的問題，最終卻能統一出解決的規律。這，也許就是數學的魅力所在。

~全文完~

參考資料：

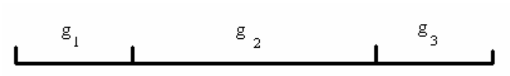
<<數學的魅力>> P. 69 - 70 沈康身 著 上海辭書出版社

http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E4%BA%94%E8%BE%B9%E5%BD%A2&variant=zh-hk —— 維基百科—正五邊形

附錄：

1. 首先，我們設尺規可作線段組成一個集合G；分別設尺規對G元素的兩種二元運算 $(k_1 + k_2,\quad k_1 \times k_2,)$ 為「+」,「×」。

∵g $(g \in G)$ 經過尺規作圖變換所得出的 g'，一定是尺規可作的；而 g 是尺規可作線段(根據 G 的定義)，所以{G，+}和{G，×}是封閉的。(G is closed under + and ×.)



明顯地，$g_1 + (g_2 + g_3) = (g_1 + g_2) + g_3$

而因為$G \subset \mathbf{R}$，所以$g_1 \times (g_2 \times g_3) = (g_1 \times g_2) \times g_3$

所以，{G，+}和{G，×}符合結合律。({G，+} and {G，×} are associative.)

{G，+}中有單位元 0(點)，$g + 0 = g$

{G，×}中有單位元 e(長為 1 的單位線段)，$g \times \mathrm{e} = g$

∴{G，+}和{G，×}都有單位元。 (There are both identity elements in {G，+} and {G，×}.)

因為$G \subset \mathbf{R}$，所以$g_1 + g_2 = g_2 + g_1$

$g_1 \times g_2 = g_2 \times g_1$

∴{G，+}和{G，×}符合交換律。({G，+} and {G，×} are commutative.)

對於{G，×} ，g 有逆元$\frac{1}{g}$，$g \times \frac{1}{g} = \mathrm{e}$

然而因為 G 中沒有負數，則{G，+}不存在逆元。

所以，{G，+}為交換幺半群(commutative monoid)，

{G，×}為交換群(abelian group)。

2.

$\because \sin 36^\circ = \dfrac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}$ $\qquad$ $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

$\sin 30^o = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}\cos\ 6^o &= \cos(36^o - 30^o)\\ &= \cos 36^o \cos 30^o + \sin 36^o \sin 30^o\\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{8}\end{aligned}$$

由半角公式，得

$$\begin{aligned}\cos 3^o &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos 6^o}{2}}\\ &= \pm\frac{\sqrt{8+\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}}{4}\end{aligned}$$

由於線段長度不能爲負數，故取正值。

又由三倍角公式，

$$4\cos^3 1^o - 3\cos 1^o = \cos 3^o$$

$$\Rightarrow \quad 4(\cos 1^o)^3 - 3\cos 1^o = \frac{\sqrt{8+\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}}{4} \qquad \cdots (1)$$

$$4\cos^3 2^o - 3\cos 2^o = \cos 6^o$$

$$\Rightarrow \quad 4(\cos 2^o)^3 - 3\cos 2^o = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{8} \qquad \cdots (2)$$