

## 拉姆賽理論 (Ramsey's Theory)

世界上任何六個人之中，必定有三個是互相認識或互相不認識的。這樣有趣的事實相信很多人都會聽過，但其實類似的結果還有很多，例如：九個人中一定有三個互相認識或有四個互不認識、十四個人中一定有三個互相認識或有五個互不認識。現在我們嘗試將上述結果加以推廣，探討一下它們背後所蘊含的規律。

設  $p, q \geq 2$  是兩個給定的正整數，定義  $R(p, q)$  為滿足到以下命題的正整數  $n$  之最小值：如果將一個  $n$  階完全圖  $K_n$  中的每條邊均任意地塗上紅色或藍色，則其中必定出現一個全紅的  $p$  階完全圖  $K_p$  或一個全藍的  $q$  階完全圖  $K_q$ 。另外，我們記  $E_n$  為  $n$  階的空圖。

這樣的數稱為拉姆賽數，例如  $R(3, 3) = 6$ 、 $R(3, 4) = 9$ 、 $R(3, 5) = 14 \dots$  等都是拉姆賽數。由定義可知拉姆賽數滿足以下兩個性質：

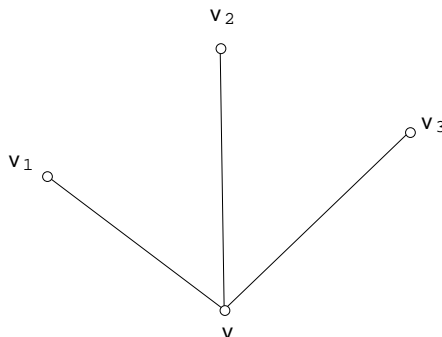
1. 對於任何的正整數  $p, q \geq 2$  有  $R(p, q) = R(q, p)$ 。
2. 對於任何的正整數  $q \geq 2$  有  $R(2, q) = q$ 。

到目前為止，人類所知道的拉姆賽數可以說是寥寥可數。除了之前提及過的  $R(2, q) = q$  之外，我們亦不難找出  $R(3, 3), R(3, 4), R(3, 5) \dots$  等幾個較小的拉姆賽數，但之後就展開了一段探索拉姆賽數的漫長旅程。我們在這裏首先討論的就是  $R(3, 3)$ 。

**例一**：證明世界上任何六個人之中，必定有三個是互相認識或互相不認識。

**分析**：題目等價於證明如果一個六階完全圖  $K_6$  的每條邊均被塗上紅色或藍色，則必定會出現一個單色三角形。（簡單地說，題目要求證明  $R(3, 3) \leq 6$ 。）

**證明**：在  $K_6$  中任意抽一個頂點  $v$ ，與  $v$  相鄰的邊有五條，每條都是紅色或藍色，由平均數原理可知至少必有三條邊是同色的，不妨設  $vv_1$ 、 $vv_2$  和  $vv_3$  都是紅色。（下圖中實線表示紅色）



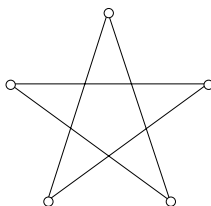
考慮  $v_1$ 、 $v_2$ 、 $v_3$  這三點之間的邊，只要它們其中一條邊是紅色，則圖中便出現一個紅色三角形。反之若  $v_1v_2$ 、 $v_2v_3$  和  $v_3v_1$  均是藍色，那麼  $v_1v_2v_3$  就是一個藍色三角形。

這就證明了圖中必包含單色三角形。(事實上我們可以證明二色  $K_6$  中單色三角形至少有兩個。)

證畢

**定理一：**  $R(3,3) = 6$ 。

**證明：** 由例一可知  $R(3,3) \leq 6$ ，故餘下的工作就是構作一個 5 階圖使得當中不含  $K_3$  及  $E_3$  (只有三個頂點而沒有邊的空圖)。以下便是這樣的一個圖：



這樣的一個圖肯定了  $R(3,3) > 5$ ，從而定理得證。

證畢

以上用構造法去確定  $R(3,3)$  的下界，無疑直接了當。可是當頂點數目較大時，這樣的構作就變得困難，例如要構作一個三色  $K_{16}$  使其當中沒有單色  $K_3$  就不是一下子可以想到的。

現在數學家們普遍認為，若不創造新的方法，即使電腦的計算速度日益進步，也很難計算得到很多  $R(p,q)$  的準確值。所以求出  $R(p,q)$  的上、下界就越見重要，以下是一個簡單的結果：

**定理二：** 對任意  $p, q \geq 3$  成立有  $R(p,q) \leq R(p-1,q) + R(p,q-1)$ 。

**證明：** 記  $n = R(p-1,q) + R(p,q-1)$ ，以下證明一個二色 (紅色和藍色)  $K_n$  中必有紅色  $K_p$  或藍色  $K_q$ 。

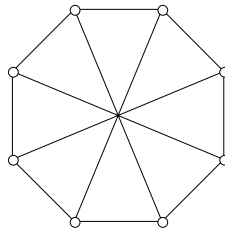
任意取一個頂點  $v$ ，考察與  $v$  相連的  $n-1$  條邊。留意到其中必有  $R(p-1,q)$  條紅邊或  $R(p,q-1)$  條藍邊，否則與  $v$  相連的邊的數目最多只有  $[R(p-1,q)-1] + [R(p,q-1)-1] = n-2$ ，這是不可能的。

不妨假設有  $R(p-1,q)$  條紅邊與  $v$  相連，則對應有  $R(p-1,q)$  個  $v$  的相鄰點。在這些點所形成的子完全圖中必有紅色  $K_{p-1}$  或藍色  $K_q$ 。若有藍色  $K_q$  則問題已解決，若有紅色  $K_{p-1}$  則  $K_{p-1} \cup \{v\}$  便是一個紅色的  $K_p$ 。

類似地如果有  $R(p,q-1)$  條藍邊與  $v$  相連，那麼也一定可以找到一個紅色  $K_p$  或藍色  $K_q$ 。

證畢

有了定理二，我們可以很快找出  $R(3,4), R(4,4)$  及  $R(3,5)$ 。比如說我們有  $R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3) = 4 + 6 = 10$ ，經過在紙上畫圖實驗後我們不難找到一個 8 階圖使其不含  $K_3$  及  $E_4$ ，例如：



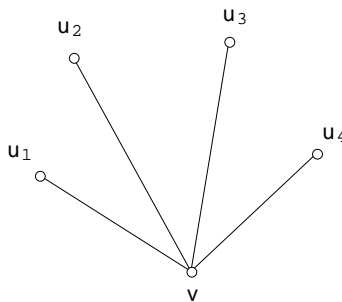
於是  $R(3,4) > 8$ 。另一方面我們找了很久也找不到 9 階圖不含  $K_3$  及  $E_4$ ，這使人猜想  $R(3,4) = 9$ 。

**定理三：**  $R(3,4) = 9$ 。

**證明：** 由以上的討論已知  $R(3,4) > 8$ ，故只需證明任何一個紅藍二色的  $K_9$  必包含紅色  $K_3$  或藍色  $K_4$ 。

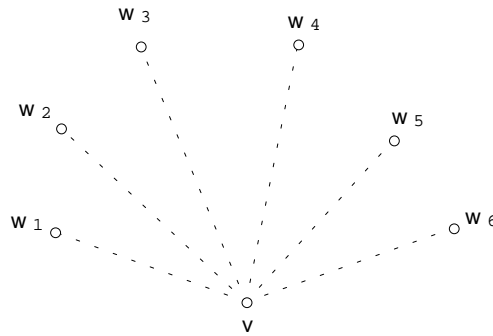
考察以下兩種情況：

(i)  $K_9$  中某個頂點  $v$  有四條紅邊與其相連 (如下圖)。



在這情況下  $u_1, u_2, u_3, u_4$  所形成的  $K_4$  中若包含紅邊  $u_i u_j$ ，則  $u_i u_j v$  便是紅色  $K_3$ 。否則  $u_1, u_2, u_3, u_4$  亦是一個藍色  $K_4$ 。

(ii)  $K_9$  中某個頂點  $v$  有六條藍邊與其相連 (如圖)。



由於  $w_1w_2w_3w_4w_5w_6$  所成的  $K_6$  之間必有紅色  $K_3$  或藍色  $K_3$ ，所以原來的  $K_9$  中必有紅色  $K_3$  或藍色  $K_4$ 。

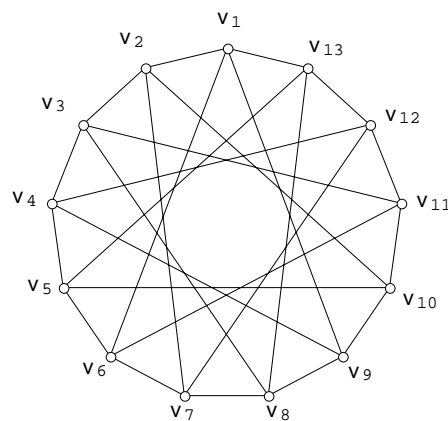
現在證明 (i) 和 (ii) 至少有一個成立。假設這兩種情況都不出現，那麼  $K_9$  中每個頂點都剛好與三條紅邊及五條藍邊相連。將所有藍邊從圖中刪去，在餘下的圖中每個頂點的次數都是 3，九個頂點的次數總和是  $3 \times 9 = 27$ ，矛盾（任何有限簡單圖的各頂點次數總和必定是偶數）。

證畢

接下來考慮  $R(3,5)$ ，首先留意到的是  $R(3,5) \leq R(2,5) + R(3,4) = 5 + 9 = 14$ ，以下證明  $R(3,5) = 14$ 。方法是構造一個 13 階圖使其不包含  $K_3$  及  $E_5$ 。

**定理四：**  $R(3,5) = 14$ 。

證明：顯然  $R(3,5) \leq R(2,5) + R(3,4) = 5 + 9 = 14$ ，以下是 13 階圖不含  $K_3$  及  $E_5$ ：

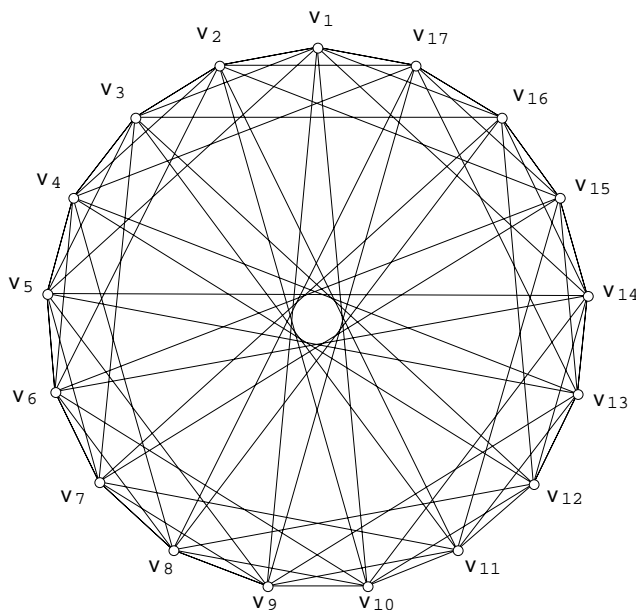


這圖構作的方法是這樣的： $v_i$  與  $v_j$  相連當且僅當  $|i - j| \in \{1, 5, 8, 12\}$ 。不難看出圖中不含  $K_3$  及  $E_5$ ，故  $R(3,5) = 14$ 。

證畢

**定理五：**  $R(4,4) = 18$ 。

證明： 與上一個定理的證明一樣，我們有  $R(4,4) \leq R(3,4) + R(4,3) = 9 + 9 = 18$ ，而下圖保證了  $R(4,4) > 17$ 。



圖中  $v_i$  與  $v_j$  相連當且僅當  $|i - j| \in \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$ 。

證畢

在這裏我們不打算進一步討論其它  $R(p, q)$  的準確值，下表列出一些  $R(p, q)$  的已知值及上、下界：

$p \backslash q$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	<u>6</u>	<u>9</u>	<u>14</u>	<u>18</u>	<u>23</u>	<u>28</u>	<u>36</u>	40 43	46 51	51 60
4		<u>18</u>	<u>25</u>	35 41	49 61	53 84	69 115	80 149	96 191	106 238
5			43 49	58 87	80 143	95 216	114 316	442		
6				102 165	298	495	780	1171		

➤ 注意有雙底線的是準確值，且表中的上、下界是包容 (inclusive) 的。

「假設有一隻妖精對我們說：『告訴我  $R(5,5)$  的值，否則我就要消滅人類。』也許我們最好的策略是集中所有的電腦和專家來求這個值。但如果妖精問  $R(6,6)$ ，我們最好的選擇也許是在他動手前先幹掉他。」

愛爾多斯

**練習題：**

- 一、 證明對任意整數  $p, q \geq 2$  成立有  $R(p, q) \leq C_{p-1}^{p+q-2}$ 。(這稱作愛爾多思—塞克爾斯上界。)

利用這結果證明  $R(p, p) \leq \frac{4^{p-1}}{\sqrt{p-1}}$ 。這個上界保持了 50 年，直至 1986 年捷克數學家洛特爾 (V. Rödl) 及後來 1988 年丹麥數學家托瑪松 (A. Thomason) 將它改進為

$$R(p, p) \leq \frac{A \times C_{p-1}^{2p-2}}{\sqrt[3]{p-1}},$$

其中  $A$  是正常數。

- 二、 證明對  $p \geq 3$  時有  $R(p, p) > 2^{\frac{p}{2}}$ 。在 1975 年斯彭塞更證明了

$$R(p, p) > \left( \frac{\sqrt{2}}{e} + o(1) \right) p 2^{\frac{p}{2}}.$$

這裏  $o(1)$  是一個  $p$  的函數，當  $p$  趨向無限大時它趨向零。