

國際數學奧林匹克2003  
香港選拔賽初賽  
2002年5月26日

本卷各題全答  
請將答案寫在答題紙上  
不可使用計算機

時限：3小時

1. (1分) 設 $n$ 是滿足以下條件的正整數：無論怎樣將 $10^n$ 分解為兩個正整數的積，其中一個數必包含“0”這數字。求 $n$ 的最小可能值。
2. (1分) 一時鐘的時針長為3，分針長為4。問在同一天上午一時至下午一時的一段時間內，時針與分針的端點的距離為整數多少次？
3. (1分) 求由1至1000內所有包含“7”這數字的數的總和。
4. (1分) 選擇題測驗共有100條問題。每題答對得4分，不作答得0分，答錯得-1分。問這測驗可以有多少個不同的總分？(可以有負分。)
5. (1分) 一個正整數如果由左邊或右邊讀起都一樣，則稱為「回文數」，例如2002是一個四位回文數。求所有四位回文數的總和。
6. (1分)  $A$ 和 $B$ 是平面上的兩個點。經過 $A$ 點的一條直線將平面分為兩部分，經過 $B$ 點的另一條直線可再將平面共分為四部分。現各有1002及1000條直線，分別經過 $A$ 點和 $B$ 點，問這些直線最多可將平面分為多少部分？
7. (1分) 在 $\triangle ABC$ 中， $X$ 、 $Y$ 為 $BC$ 上的點使得 $BX = XY = YC$ ， $M$ 、 $N$ 為 $AC$ 上的點使得 $AM = MN = NC$ 。 $BM$ 和 $BN$ 分別交 $AY$ 於 $S$ 和 $R$ 。若 $\triangle ABC$ 的面積為1，求 $SMNR$ 的面積。
8. (1分) 設 $0.3010 < \log 2 < 0.3011$ ， $0.4771 < \log 3 < 0.4772$ ，求 $12^{37}$ 最左的一位數字。
9. (1分) 設 $x_1, y_1, x_2, y_2$ 為實數，且 $x_1^2 + 5x_2^2 = 10$ ， $x_2y_1 - x_1y_2 = 5$ 和 $x_1y_1 + 5x_2y_2 = \sqrt{105}$ 。求 $y_1^2 + 5y_2^2$ 的值。
10. (1分) 小於500的正整數中有多少個剛好有15個正因子？
11. (1分) 求第2002個不能寫成兩個平方整數的差的正整數。
12. (1分) 在梯形 $ABCD$ 中， $BC \perp AB$ ， $BC \perp CD$ 及 $AC \perp BD$ 。若 $AB = \sqrt{11}$ ， $AD = \sqrt{1001}$ ，求 $BC$ 。
13. (2分) 正方形 $ABCD$ 邊長為5， $E$ 為 $BC$ 上的點使得 $BE = 3$ ， $EC = 2$ 。若 $P$ 是對角線 $BD$ 上的點使 $PE + PC$ 的值最小，求 $PB$ 的長度。
14. (2分) 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB = 3\angle BAC$ ， $BC = 5$ ， $AB = 11$ 。求 $AC$ 。

15. (2分) 在  $\triangle ABC$  中， $D$ ， $E$ ，和  $F$  分別為  $AB$ ， $BC$  和  $CA$  的中點。且  $AB = 10$ ， $CD = 9$ ， $CD \perp AE$ 。求  $BF$ 。
16. (2分)  
 在正四面體的每一個頂點和每一個面都塗上紅色或藍色，問有多少種不同的塗色方法？(若能將兩個已塗色的四面體適當旋轉使得對應的頂點和面同色，則這兩個四面體只能算為一種塗色方法。)
17. (2分) 設  $a_0 = 2$ ，且對  $n \geq 1$  時  $a_n = \frac{\sqrt{3}a_{n-1} + 1}{\sqrt{3} - a_{n-1}}$ 。用  $p + q\sqrt{3}$  的形式表示  $a_{2002}$  的值  
 (其中  $p$  和  $q$  為有理數)。
18. (2分) 設  $A_1 \dots A_{2002}$  為正 2002 邊形。每一頂點  $A_i$  對應正整數  $a_i$  使下列條件成立：如果  $j_1, j_2, \dots, j_k$  為正整數， $k < 500$ ，而  $A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_k}$  為正  $k$  邊形時，則  $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}$  的值互不相同。求  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2002}$  的最小可能值。
19. (3分) 在平面上有 5 點。現用以下步驟畫上直線。  
 步驟 1：將任何 2 點連接起來。  
 直線畫好之後，發覺沒有兩條線是平行的，沒有兩條線是互相垂直的，也沒有三條線交於一點。  
 步驟 2：由原先的 5 點任何一點出發，畫直線使垂直於其餘四點間任二點的連線。  
 問在步驟 2 的過程 中所形成的線之間最多共有多少個交點(包括原先的 5 點)？
20. (3分)  
 一長方形紙張的邊長為整數。將紙張對摺使得其中兩個對角重疊，得摺線的長度為 65。求該長方形紙張週長的一個可能值。

全卷完