International Mathematical Olympiad
Hong Kong Preliminary Selection Contest 2010

國際數學奧林匹克
香港選拔賽初賽 2010

29th May 2010

2010 年 5 月 29 日

Time allowed: 3 hours

時限：3 小時

Instructions to Candidates:
考生須知：

(i) Answer ALL questions.
本卷各題全答。

(ii) Put your answers on the answer sheet.
請將答案寫在答題紙上。

(iii) The use of calculators is NOT allowed.
不可使用計算機。

1. Let $f(n)=3n^2-3n+1$. Find the last four digits of $f(1)+f(2)+\cdots+f(2010)$. (1 mark)

設 $f(n)=3n^2-3n+1$。求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2010)$ 的最後四位數字。（1 分）

2. Let n be a positive integer. If n is divisible by 2010 and exactly one of the digits of n is even, find the smallest possible value of n. (1 mark)

設 n 為正整數。若 n 可被 2010 整除，且 n 的數字中剛好有一個偶數，求 n 的最小可能值。（1 分）

3. Let n be an integer greater than 1. If n is greater than 1200 times any one of its prime factors, find the smallest possible value of n. (1 mark)

設 n 為大於 1 的整數。若 n 較它的任何一個質因數的 1200 倍為大，求 n 的最小可能值。（1 分）

4. There are 111 balls in a box, each being red, green, blue or white. It is known that if 100 balls are drawn, we can ensure getting balls of all four colours. Find the smallest integer N such that if N balls are drawn, we can ensure getting balls of at least three different colours. (1 mark)

某盒子中有 111 個球，每個都是紅色、綠色、藍色或白色的。已知若從中抽出 100 個球，則必定可得到全部四種顏色的球。求最小的整數 N，使得從盒子中抽出 N 個球時，必定可得到最少三種不同顏色的球。（1 分）

5. The positive integers a, b, c, d satisfy $a>b>c>d$, $a+b+c+d=2010$ and $a^2-b^2+c^2-d^2=2010$. How many different sets of possible values of (a, b, c, d) are there? (1 mark)

正整數 a、b、c、d 滿足 $a>b>c>d$、$a+b+c+d=2010$ 及 $a^2-b^2+c^2-d^2=2010$。問 (a, b, c, d) 有多少組不同的可能值？（1 分）

6. Let $P(x)$ be a quadratic polynomial with real coefficients such that $P(11)=181$ and $x^2-2x+2\le P(x)\le 2x^2-4x+3$ for any real number x. Find $P(21)$. (1 mark)

設 $P(x)$ 為二次多項式，其系數皆為實數。已知 $P(11)=181$，且對任意實數 x 皆有 $x^2-2x+2\le P(x)\le 2x^2-4x+3$，求 $P(21)$。（1 分）

7. Find the largest integer which cannot be expressed as sum of some of the numbers 135, 136, 137, …, 144 (each number may occur many times in the sum or not at all). (1 mark)

某整數不能寫成 135、136、⋯、144 當中的某些數之和（在和式中每個數出現的次數不限，亦可以不出現）。求該整數的最大可能值。（1 分）

8. Let n be a positive integer. By removing the last three digits of n, one gets the cube root of n. Find a possible value of n. (1 mark)

設 n 爲正整數。若把 n 的最後三位數字刪掉，所得的數等於 n 的立方根。求 n 的一個可能值。 （1 分）

9. Let p and q be integers such that $p+q=2010$. If both roots of the equation $10x^2+px+q=0$ are positive integers, find the sum of all possible values of p. (1 mark)

設 p、q 爲整數，且 $p+q=2010$。若方程 $10x^2+px+q=0$ 的兩根均爲正整數，求 p 所有可能值之和。 （1 分）

10. A plane P slices through a cube of side length 2 with a cross section in the shape of a regular hexagon. The inscribed sphere of the cube intersects P in a circle. What is the area of the region inside the regular hexagon but outside the circle? (1 mark)

一個邊長爲 2 的正方體被平面 P 切開，切面爲正六邊形。內切於該正方體的球體與 P 相交於一個圓形。位於正六邊形內及圓形外的區域的面積是多少？ （1 分）

11. Let $ABCD$ be a square of side length 1. P and Q are two points on the plane such that Q is the circumcentre of ΔBPC and D is the circumcentre of ΔPQA. Find the largest possible value of PQ^2. Express the answer in the form $a+\sqrt{b}$ or $a-\sqrt{b}$, where a and b are rational numbers. (2 marks)

設 $ABCD$ 爲正方形，邊長爲 1。P、Q 爲平面上的兩點，使得 Q 是 ΔBPC 的外心、D 是 ΔPQA 的外心。求 PQ^2 的最大可能值，答案以 $a+\sqrt{b}$ 或 $a-\sqrt{b}$ 形式表示，其中 a、b 爲有理數。 （2 分）

12. Let $ABCD$ be a square of side length 3. P is a point on the plane such that each of $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPD$ and $\angle DPA$ is at least $60°$. If each possible position of P is painted red, find the area of the red region. (2 marks)

設 $ABCD$ 爲正方形，邊長爲 3。P 是平面上的一點，使得 $\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPD$ 和 $\angle DPA$ 均不小於 $60°$。若把每個 P 的可能位置均塗上紅色，求紅色區域的面積。 （2 分）

13. 6 different points are given on the plane, no three of which are collinear. Each pair of points is to be joined by a red line or a blue line subject to the following restriction: if the lines joining AB and AC (where A, B, C denote the given points) are both red, then the line joining BC is also red. How many different colourings of the lines are possible? (2 marks)

在平面上給定 6 個不同的點，當中沒有三點共線。現要把任意兩點均以一條紅線或藍線連起，並須符合以下規定：若 AB 和 AC（這裡 A、B、C 代表給定的點）均以紅線連起，則 BC 亦必須以紅線連起。那麼，連線的顏色有多少個不同的組合？ （2 分）

14. Let $[x]$ denote the greatest integer not exceeding x, e.g. $[\pi]=3$, $[5.31]=5$ and $[2010]=2010$. Given $f(0)=0$ and $f(n)=f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)+n-2\left[\frac{n}{2}\right]$ for any positive integer n. If m is a positive integer not exceeding 2010, find the greatest possible value of $f(m)$. (2 marks)

設 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數，例如：$[\pi]=3$ 、$[5.31]=5$ 、$[2010]=2010$ 。已知 $f(0)=0$，且對任意正整數 n 皆有 $f(n)=f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)+n-2\left[\frac{n}{2}\right]$。若 m 是不超過 2010 的正整數，求 $f(m)$ 的最大可能值。（2 分）

15. An equiangular hexagon has side lengths 6, 7, 8, 9, 10, 11 (not necessarily in this order). If the area of the hexagon is $k\sqrt{3}$, find the sum of all possible values of k. (2 marks)

某等角六邊形各邊的長度爲 6、7、8、9、10、11（不一定按此順序）。若這六邊形的面積爲 $k\sqrt{3}$，求 k 的所有可能值之和。（2 分）

16. On the plane there are two triangles, each with side lengths 18, 24 and 30. If the two triangles do not completely overlap, but share the same circumcircle as well as the same inscribed circle, find the area of the region common to both triangles. (2 marks)

平面上有兩個三角形，邊長都是 18、24、30。若兩個三角形並非完全重疊，但它們的外接圓相同，內切圓也相同，求兩個三角形重疊部分的面積。（2 分）

17. $ABCD$ is a rectangle; P and Q are the mid-points of AB and BC respectively. AQ and CP meet at R. If $AC = 6$ and $\angle ARC = 150°$, find the area of $ABCD$. (2 marks)

$ABCD$ 是長方形，P 和 Q 分別是 AB 和 BC 的中點，且 AQ 交 CP 於 R。若 $AC = 6$ 而 $\angle ARC = 150°$，求 $ABCD$ 的面積。（2 分）

18. Let p, q, r, s be the four roots of the equation $2(10x+13)^2(5x+8)(x+1)=1$. If $pq+rs$ is real, find the value of this real number. (2 marks)

設 p、q、r、s 爲方程 $2(10x+13)^2(5x+8)(x+1)=1$ 的四個根。若 $pq+rs$ 是實數，求此實數的值。（2 分）

19. If $a\circ b=\dfrac{\sqrt{a^2+3ab+b^2-2a-2b+4}}{ab+4}$, find $((\cdots((2010\circ 2009)\circ 2008)\circ\cdots\circ 2)\circ 1)$. (2 marks)

若 $a\circ b=\dfrac{\sqrt{a^2+3ab+b^2-2a-2b+4}}{ab+4}$，求 $((\cdots((2010\circ 2009)\circ 2008)\circ\cdots\circ 2)\circ 1)$。（2 分）

20. Let x be a non-zero real number such that $\sqrt[5]{x^3+20x}=\sqrt[3]{x^5-20x}$. Find the product of all possible values of x. (2 marks)

設 x 爲非零實數，使得 $\sqrt[5]{x^3+20x}=\sqrt[3]{x^5-20x}$。求 x 的所有可能值之積。（2 分）

– End of Paper – 全卷完 –